

Arquimedes e Geometria Diferencial

Rui Albuquerque

Universidade de Évora

22 de Outubro de 2007

Ἀρχή

Este texto resulta de uma breve comunicação na Escola de Verão de Matemática de 2007 da Sociedade Portuguesa de Matemática, em que se almejou abordar os dois temas referidos no título.

Recordar Arquimedes e trazê-lo para a actualidade da geometria diferencial... Os matemáticos gregos estarão na origem, no *arqué* de toda a matemática moderna, mas tal não justifica dois títulos num mesmo artigo.

Mergulhar assim no mais distante do grande oceano da matemática pode levar a um triste despertar. Porém é necessário que alguns se aventurem, para que outros conheçam os perigos e as preciosidades que tal oceano esconde. Mesmo que corramos o risco de nos perguntarem o que andamos ali a fazer, onde poderão levar tão insólitas braçadas, diremos que este mar é de todos quantos o queiram perscrutar.

Três ressalvas nos parecem necessárias. Primeiro, não queremos de forma nenhuma reduzir a obra de Arquimedes a meia dúzia de enunciados. Existe uma complexa e extensa obra. Por mais aplicada que se considere a sua matemática, Arquimedes escrevia como os homens letrados da sua época e argumentava como um cientista, com proposições, lemas e teoremas. Os seus resultados são desconhecidos, a começar, por isso mesmo: não são triviais, carecem de uma construção e justificação teóricas.

Segundo, não pretendemos afirmar que haveria relações enigmáticas ou místicas entre a matemática de Arquimedes e o Cálculo Diferencial, o qual, como se sabe, apareceu algum tempo depois do fim da Idade Média. Não vamos de todo estabelecer relações. O que nos suscita é interrogar, de novo, sobre o porquê de tantos anos perdidos com a chamada Era das Trevas quando a civilização pré-romana já havia ido tão longe, mesmo antevendo não lograr encontrar uma resposta. Se tempo houvesse, lembraríamos os homens que contrariaram e resis-

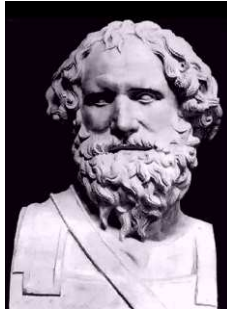


Figura 1: Arquimedes de Siracusa

tiram, os que fizeram o renascimento da cultura clássica e com ela deram novos conhecimentos ao mundo.

Finalmente, visto o anterior, julgamos poder e dever continuar mesmo se os resultados desta breve exposição fogem das nossas intenções, assim como ter bem avisado o leitor dos meandros do pensamento difuso que dele emergem.

Afinal, para nós, trata-se de encontrar inspiração recordando o mestre da matemática do século III a.c., um dos maiores de sempre, para chegar à geometria diferencial, aquela que vem dando razão de ser às mais diversas áreas da matemática da actualidade.

1 Arquimedes de Siracusa, 287-212 a.c.

Em 2013 terão passado 2300 anos sobre o nascimento do grande *Αρχιμήδης*, génio célebre da matemática e da física.

Arquimedes nasceu e morreu em Siracusa, na Sicília, filho do astrónomo Fídias, de uma família respeitada pelo rei Hierão. Cedo foi estudar para Alexandria onde uma escola de matemática, entre outras, havia sido fundada por Euclides (c.330-265 a.c.). Em Alexandria fez numerosos amigos estudiosos com quem se correspondeu ao longo da vida, como por exemplo o matemático Eratóstenes.

Arquimedes é autor de imensas descobertas e inventos notáveis e peripécias, cada uma mais emblemática que a outra.

Lembremos os momentos célebres em que ele diz “dêem-me um ponto de apoio e com a minha alavanca erguerei o mundo” referindo-se aos seus estudos teóricos sobre o equilíbrio dos corpos, o grito de *εὕρηκα* saindo do banho para a rua quando descobriu uma lei da hidrostática. E as criações do chamado

Parafuso de Arquimedes, o estudo da chamada Espiral de Arquimedes ou as invenções de instrumentos militares (um dos quais, muito peculiar, consistiria numa espécie de feixe solar para incendiar barcos romanos ao largo de Siracusa; porém, algumas experiências recentes terão levantado muito fumo sobre tal invento).

Menos conhecidas serão a criação de um método numérico para contar além da “miríade” (10^4) os grãos de areia do Universo, ou o Axioma de Arquimedes, que afinal este atribui a Eudócio, hoje estudado na Análise e que justifica o chamado método de “exaustão” para os matemáticos gregos (ou de ‘integração’), ie. algo aparentemente tão óbvio como $\forall M > 0, \forall 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \lim_n Mr^n = 0$.

Ou, ainda, um cálculo muito aproximado da $\sqrt{3}$.

Assim como uma elegante e simples trisecção do ângulo com compasso e régua com apenas duas marcas, problema célebre posto por Euclides que se destinava a ser resolvido com compasso e régua não graduada — e que afinal se provou ser impossível, cf. figura 2.

A vida de Arquimedes deverá ter sido a de um verdadeiro cientista fortemente comprometido com a investigação, tanto pura como aplicada, e simultaneamente com a ajuda aos homens da sua cidade em questões e problemas práticos.

Até a sua morte nos parece quase mitológica: durante as guerras Púnicas quando as tropas do romano Marcellus, depois de muito tentarem, invadiram a ilha num ataque surpresa, ainda que soubessem do célebre cientista, um soldado ter-lhe-á cravado a espada. Com Arquimedes avisando que o deixassem concluir certos cálculos...

1.1 Um teorema sobre a parábola

O método de exaustão, talvez devido a Antífono e seu colega Brison de Heracleia, século V a.c., permitiu encontrar a mais famosa aproximação de pi de sempre. Durante mil anos não se encontrou melhor que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}, \quad (1)$$

que Arquimedes conseguiu dividindo o círculo em 96 partes.

O método de exaustão permitiu de facto estabelecer resultados precisos. Por exemplo, cremos que o seguinte esquema, ver figura 2, era conhecido dos

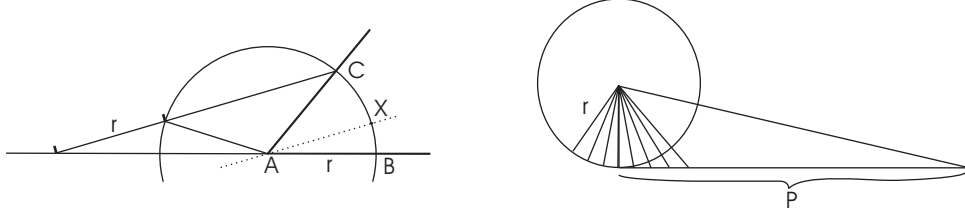


Figura 2: À esquerda, $\angle CAB = 3\angle XAB$ com régua graduada com a medida do raio. À direita, Área do círculo = $\frac{Pr}{2} = \pi r^2$.

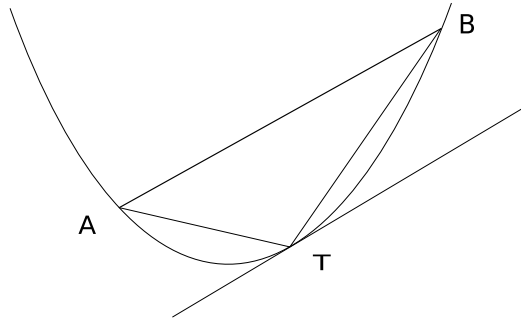


Figura 3: Área $\triangle ABT = \frac{3}{4}$ Área da parábola ABT .

matemáticos gregos mais antigos. Trata-se da justaposição de triângulos de altura $r = \text{raio}$, dado o perímetro P , deduzindo-se a área do círculo.

O seguinte resultado utiliza outro método na demonstração inteiramente devido ao físico-matemático, que se refere mais à frente.

Teorema 1 (Arquimedes, [2]). *A área do maior triângulo inscrito num segmento de uma parábola é $3/4$ da área do respectivo segmento de parábola.*

Em particular,

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots = 1. \quad (2)$$

Sendo o eixo dos y 's o eixo de simetria de uma parábola $y = kx^2$, $k > 0$, (podemos sempre encontrar uma transformação afim do plano onde a parábola é descrita por esta equação, ou mesmo com $k = 1$), cf. figura 3. Repare-se que o ponto T é o ponto onde a tangente à parábola tem o declive do segmento AB . Supondo esta recta dada como $y = ax + b$, a, b constantes, obtivemos o valor da área do triângulo ABT como $\frac{(a^2 + 4kb)^{\frac{3}{2}}}{8k^2}$ — um exercício simples quando armados do cálculo diferencial. Convém ainda ter presente que qualquer transformação afim preserva a razão entre duas áreas.

Arquimedes prova também que as projecções de A e B no eixo dos x 's são equidistantes da respectiva projecção de T . Lembremo-nos que Arquimedes não possui os conceitos mais elementares da *ál-jbra* de hoje, apenas as relações entre quantidades geométricas.

Os gregos já referiam as tangentes; Arquimedes manuseia-as com mestria para obter, por exaustão, construindo a série (2), a área da parábola através da dos triângulos inscritos. Repare-se que há um processo indutivo no problema: recortado o triângulo, surgem duas novas regiões em condições análogas e de área total $1/4$ da área do segmento de parábola.

Curiosamente, o teorema parece ser pouco conhecido nos dias de hoje.

O estudo das cúbicas foi outro tema que Arquimedes abraçou, tendo sido mais tarde continuado por Omar Khayyam (o matemático e poeta persa-árabe do século XIII, que nos legou a notação ‘chai’, ‘coisa’, que depois degenerou em x). Recordamos que os árabes foram os guardiões de muita da cultura helénica e, em particular, de algumas obras de Arquimedes.

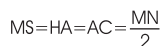
1.2 O Método

Aquele que ficou conhecido como o Método de Arquimedes vem dos seus estudos da física. Foi finalmente compreendido há cerca de um século, depois de ter sido encontrado num livro de uma biblioteca de Constantinopla (hoje Istambul) pelo estudioso dinamarquês J. L. Heiberg. Este reconheceu o autor que subjazia num palimpsesto (um escrito de missas de monges bizantinos num suporte de papiro ou pele já utilizado, depois de raspado e lavado). O “palimpsesto de Arquimedes” contém muitas páginas de resultados para sempre julgados perdidos, uns que não chegaram a ser apagados e outros legíveis por recursos técnicos, incluindo o texto do agora famoso “Stomachion”, um jogo inventado pelo mestre.

Vejamos uma aplicação do Método.

Recorde-se, para o que segue, que o volume do cone em relação ao cilindro com a mesma base e altura estavam já calculados. Com efeito, aparecem nos *Elementos* de Euclides, tomando essa razão o valor de $1/3$. Segundo [3], Arquimedes atribui o resultado ao célebre filósofo atomista Demócrito. Sobre o volume das esferas, o caso é mais complicado.

Teorema 2 (Arquimedes). *O volume da esfera de raio r é 4 vezes o volume do cone com diâmetro da base $2r$ e altura r . $(\frac{4}{3}\pi r^3)$.*



O volume da esfera é $2/3$ do volume do cilindro com altura e diâmetro da base iguais ao diâmetro da esfera.

O esquema representa uma secção da esfera e de um cilindro e um cone com o dobro da base dos mencionados. O ponto A servirá de fulcro da balança. Passa-se uma recta (um plano paralelo ao plano da base) genérica por S . Por semelhança de triângulos,

Logo $MS \cdot SQ = AC \cdot AS = AO^2 = QS^2 + OS^2$ e então

Estabelecidas estas relações e raciocinando como com corpos em equilíbrio, vem, no centro de gravidade $G = S$ para o cilindro (onde $\frac{HA}{AS} = 2$) e em H para a esfera e para o cone,

$$2(\text{cone } AEF + \text{esfera } ABCD) = \text{cilindro de base } EF$$

pois que se ‘integram’ aquelas áreas circulares. Finalmente, como cilindro = 3 cones AEF por [Euclides, *Elementos*, XII] [7]; e como cone $AEF = 8$ cone ABD , por duplicação de uma medida unidimensional, resulta daquela equação,

$$\text{esfera } ABCD = 4 \text{ cone } ABD.$$

Para a segunda parte, temos

$$\text{cilindro pequeno} = 6 \text{ cone } ABD = \frac{3}{2} \text{ esfera } ABCD.$$

Note-se que o método de exaustão estava aqui interligado. Bem como que a ideia rigorosa do Método será mais complicada do que a aplicação que dela aqui se faz.

Obras anteriores de Arquimedes dão-nos os enunciados do teorema acima. Mas só no Método é que ele explica como o obteve (aquele e muitos outros), defendendo ainda que o seu método mecânico lhe parecia tão bom como os demais geométricos pelos quais, ao longo da vida, por vezes em segunda ocasião havia provado os seus resultados. Cremos que um destes é o resultado sobre a parábola (teorema 1) pois são conhecidas duas demonstrações.

1.3 Área da superfície esférica

Arquimedes estudou também a área da superfície esférica, a fronteira da esfera sólida. Alguns livros de geometria diferencial atribuem-lhe o seguinte resultado (cf. [5, 12]).

Teorema 3 (Arquimedes). *A projecção cilíndrica $\phi(p) = (\theta, z)$ de S^2 sobre a superfície cilíndrica é equiareal, ie. preserva as áreas.*

Recordemos que a projecção cilíndrica corresponde à projecção tomada na horizontal dos pontos de um paralelo na esfera sobre a respectiva circunferência no cilindro. Para vermos tal projecção em cartas ou mapas da esfera, utilizamos coordenadas, e então, para termos um aberto de \mathbb{R}^2 , temos de retirar um semi-meridiano da esfera incluindo os pólos (como um corte).

Denotam-se as esferas de dimensão n e raio r por S_r^n . Temos então um ponto $p \in S_r^2$ descrito por (θ, z) , um ângulo θ relativo ao desvio do semi-meridiano retirado e uma altura z correspondente ao paralelo. Calcula-se então o *elemento de área*:

$$\omega = r \, d\theta \wedge dz, \tag{3}$$

onde r é o raio da esfera. De imediato obtemos um corolário pouco conhecido.

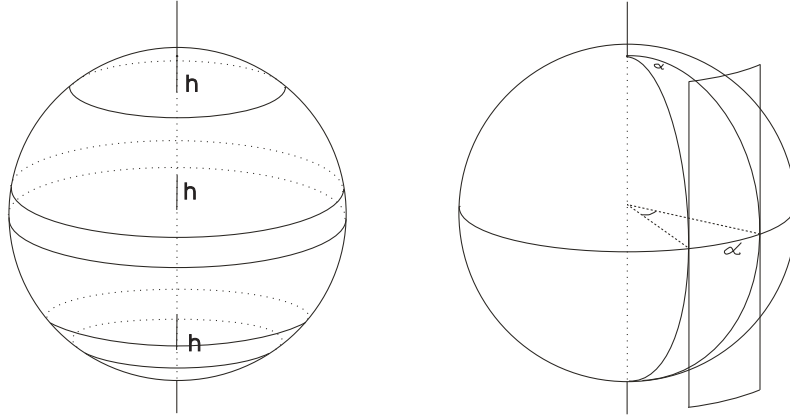


Figura 5: Dois resultados com origem no teorema de Arquimedes.

Corolário 1. *Todos os anéis de S_r^2 com a mesma altura h têm exactamente a mesma área.*

Com efeito, tal área será dada pelo integral

$$\int \omega = r \int_0^{2\pi} \int_a^{a+h} dz d\theta = 2\pi hr. \quad (4)$$

Em particular, área $S_r^2 = 4\pi r^2$. E usando argumentos como os que vimos no início (fig. 2) pode-se descobrir de novo o volume da esfera. Sob a perspectiva do ângulo, temos que uma área lunar (a superfície entre dois semi-meridianos fazendo um ângulo α) é $2r^2\alpha$. Vejam-se os dois resultados na figura 5. O último permite-nos provar:

Proposição 1 (cf. [12]). *A área de um triângulo esférico (cf. figura 6) sobre a superfície esférica de raio 1 é $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.*

Seja X a área que se procura. Repare-se que o triângulo dado tem um dual, antípoda, e cada um dos três ângulos admite duas correspondentes áreas iguais. Notêmo-las respectivamente por A, B, C . Pelo resultado acima, temos

$$X + A = 2\alpha, \quad X + B = 2\beta, \quad X + C = 2\gamma.$$

Por outro lado, $2X + 2A + 2B + 2C = 4\pi$, pelo que agora o valor de X se torna fácil de encontrar.

Note-se que o triângulo considerado é *geodésico*, ie. as suas arestas são ‘rectas’ da esfera, ou seja caminhos mais curtos entre quaisquer dois dos seus pontos.

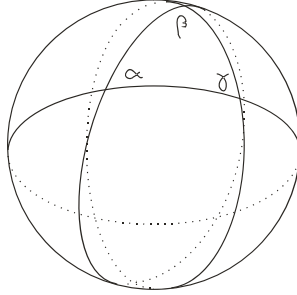


Figura 6: Área do triângulo esférico é $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Sabe-se que estes caminhos são dados por arcos de circunferência máximos, ie. com raio igual ao da esfera.

A projecção cilíndrica conserva as áreas - não as distâncias! Não é uma *isometria*. Para tal, basta ver a projecção de um paralelo, que aumenta. Ou a de um meridiano, que diminui. Mas a geodesia é uma matéria que merece um estudo próprio...

Os trabalhos de Arquimedes são verdadeiramente assombrosos pela exiguidade de instrumentos matemáticos de que ele dispunha! O seu Método ainda hoje é estudado¹, pois não só a Física que envolve é útil e verdadeira como a relação com a matemática está no âmago dos problemas actuais. Por isso ele é considerado um dos três maiores matemáticos de sempre².

Não esqueçamos todo o trabalho teórico construído por Arquimedes ao longo de 75 anos. Ele encontra-se nas suas obras referenciadas por historiadores e cronistas gregos, romanos ou árabes, que o inglês Thomas L. Heath, reconhecido historiador e tradutor de Arquimedes, ordenou cronologicamente como segue: *Do Equilíbrio de Planos I, A Quadratura da Parábola, Do Equilíbrio de Planos II, Da esfera e do Cilindro I, II, Das Espirais, Dos Conóides e Esferóides, Dos Corpos Flutuantes I, II, Da Medida do Círculo e O Arenário*. Faltando-nos ainda descobrir onde se integram o *Método dos Teoremas Mecânicos e Stomachion* (obra seguramente tardia) e *O livro dos Lemas* (cf. [1, 6, 8, 9])³.

¹Faça-se uma busca em <http://arxiv.org/> com *archimedes* no título.

²Sendo a sua efígie aquela que aparece nas célebres medalhas Fields.

³Outra importante referência no estudo de Arquimedes parece ser com certeza E. J. Dijksterhuis, cf. *Archimedes*, Munksgaard, Copenhaga, 1956, ou Princeton UP, 1987.

2 Como se define a área de superfícies?

Na dimensão 0 a medida usual é a de contagem. Na dimensão 1 temos a noção de comprimento de uma curva no espaço como a do limite da soma do comprimento de linhas poligonais inscritas.

Mas como contamos a área de uma superfície, se nem sequer localmente a podemos planificar⁴? Que conceito afinal de *volume* é esse na dimensão 2 ou em dimensões superiores?

A resposta é hoje facilmente ultrapassada por meio da teoria da ‘métrica em variedades diferenciáveis’ ou geometria riemanniana. Seja na geometria diferencial ou na física teórica, um tal instrumento não passa de uma idealização.

Abstraímos da realidade dos objectos físicos, com rigor matemático, um espaço vectorial tangente onde fazemos a geometria clássica e daí partimos para o estudo de fenómenos intrínsecos ou invariantes e, sob uma perspectiva nova, de propriedades globais⁵ dos espaços, seus subespaços e do movimento entre estes.

Suponhamos então que é dada uma porção de superfície \mathcal{S} ou uma variedade de dimensão n (conceito mais geral, mas a mesma ideia que em dim 2) como na figura 7. Um espaço tangente em cada ponto $p \in \mathcal{S}$ está bem definido, em virtude de conhecermos as cartas do espaço dado. Ou seja, temos um atlas de \mathcal{S} , que é um conjunto de cartas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ com os U subconjuntos abertos de \mathcal{S} .

Agora supomos que é dada a *métrica*, o instrumento matemático \langle, \rangle que nos permite calcular ângulos,

$$\angle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad \text{e comprimentos} \quad \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad (5)$$

$\forall u, v \in T_p \mathcal{S}$. A métrica é dada por uma aplicação bilinear, simétrica e definida-positiva, isto é, um produto interno com valores em \mathbb{R} . Se esta for razoável, então tem uma variação suave com p , ou seja é de classe C^∞ .

A métrica fica bem determinada numa carta local pelos valores $\langle \partial_i, \partial_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, n$. Recordemos que vectores ∂_i , de classe C^∞ por natureza, são induzidos

⁴Teríamos grande problema em provar que o limite da soma de áreas de faces poligonais inscritas numa qualquer superfície daria um invariante.

⁵Este conceito não tem nada a ver com a famigerada ‘globalização’ das relações humanas terrestres, apesar de muito falarmos da esfera.

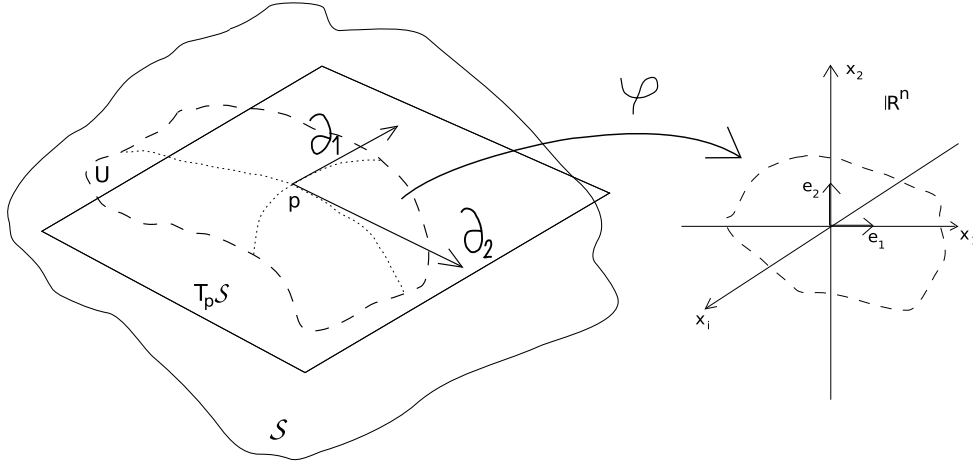


Figura 7: Definimos espaço tangente $T_p \mathcal{S}$ no ponto p sobre uma variedade \mathcal{S} de dimensão n independente da escolha das cartas. Por outro lado, escolher uma carta φ significa escolher coordenadas. E adoptar o respectivo referencial tangente ∂_i , $i = 1, 2, \dots$

em $T\mathcal{S}$ pela própria carta φ . São campos vectoriais locais. Havendo necessidade, podê-mo-los denotar por ∂_i^φ .

Seja $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$, $\forall p \in U$, onde cada x_i é função de p . É fácil adivinhar que as cartas resultam em funções C^∞ sobre as variedades, por construção, e que verificarão

$$d\varphi_p(\partial_i) = e_i, \quad \text{ou seja } \partial_i = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Suponhamos agora que nos é dada outra carta qualquer ψ com domínio (outro U) passando pelo domínio U de φ . Escrevamos $\psi(p) = (y_1, \dots, y_n)$. Então temos uma ‘lei de transformação natural’ entre cartas na intersecção dos domínios

$$\partial_i^\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \partial_k^\psi \quad (7)$$

e logo, por bilineariedade da métrica,

$$\langle \partial_i^\varphi, \partial_j^\varphi \rangle = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \langle \partial_k^\psi, \partial_l^\psi \rangle. \quad (8)$$

Note-se que esta equação nos dirá se temos uma métrica bem definida ou não: é importante que o tal aparelho para medir o espaço seja compatível com uma mudança de cartas, o que se verificará ou não pela equação (8).

Podemos escrever (8) em termos matriciais: se G^φ é a matriz da métrica, ou seja, se $G^\varphi = [\langle \partial_i^\varphi, \partial_j^\varphi \rangle]_{i,j=1,\dots,n}$ e J é a matriz jacobiana $[\frac{\partial y_k}{\partial x_i}]$, então aquela equação escreve-se

$$G^\varphi = J^t G^\psi J \quad (9)$$

com J^t a matriz transposta de J .

E temos finalmente em qualquer dimensão a definição

$$\text{vol } \mathcal{S} = \int_{\varphi(U)} \sqrt{\det G^\varphi} \, dx_1 \dots dx_n. \quad (10)$$

Nota importante: esta é a ideia essencial da definição de volume, pois surge um problema de domínio. Claro que aqui estamos apenas a integrar em U esquecendo o resto de \mathcal{S} . Para chegar a todo o lado usáramos *partições da unidade*, um dispositivo algo técnico que requer o seu tempo próprio.

Eis essencialmente como se chega hoje ao volume sabendo apenas o integral de Riemann, o qual é bem conhecido da Análise. (A história mostrará inclusive que este é que foi feito para aquele e não o contrário, como agora parece estarmos a pretender).

Teorema 4. *vol \mathcal{S} não depende da escolha da carta.*

Ressalvando a questão do domínio, este resultado vem de (9), de o determinante de um produto de matrizes ser o produto dos determinantes e de $\det J^t = \det J$, donde

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\det G^\varphi} \, dx_1 \dots dx_n &= \int \sqrt{\det G^\psi} \det J \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \sqrt{\det G^\psi} \, dy_1 \dots dy_n, \end{aligned} \quad (11)$$

como queríamos. A última igualdade vem pela propriedade conhecida da mudança de variável no integral de Riemann (o fundamental que falta provar).

Note-se que a ‘forma diferencial’ $\Omega_{\mathcal{S}}$, de grau igual à dimensão de \mathcal{S} ,

$$\Omega_{\mathcal{S}}(x) = \sqrt{\det G} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (12)$$

$x \in \mathcal{S}$, é já por si uma entidade bem definida pois é, de novo, independente da escolha das cartas. Utiliza-se aqui a álgebra exterior ou de Grassmann... $\Omega_{\mathcal{S}}$ é o *elemento de área* em dimensão 2 ou *de volume* em $\dim > 2$...

2.1 Dois casos conhecidos

Há dois casos onde a teoria acima surge logo numa expressão conhecida.

Se por exemplo $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva simples $\mathcal{C} = \gamma([a, b])$ num intervalo $[a, b]$ e a métrica no seu espaço tangente é aquela própria e rígida do espaço ambiente \mathbb{R}^n , então

$$\text{comprimento } \mathcal{C} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (13)$$

A dedução é simples: uma carta de γ , de acordo com o exposto acima, é dada pela inversa $\varphi = \gamma^{-1}$ e logo $\partial\varphi = \frac{d\gamma}{dt}$.

O segundo caso é em dimensão 2, quando temos uma porção de superfície \mathcal{S} em \mathbb{R}^3 dada por uma equação $z = f(x_1, x_2)$, com $(x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Então cada ponto $p = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathcal{S}$ fica coordenado pela carta $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow D$, $\varphi(p) = (x_1, x_2)$. Os vectores coordenados tangentes são

$$\partial_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \quad \partial_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right). \quad (14)$$

Logo $\langle \partial_1, \partial_1 \rangle = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2$, $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\langle \partial_2, \partial_2 \rangle = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2$, donde

$$\det G^\varphi = \det \begin{bmatrix} 1 + (f'_{x_1})^2 & f'_{x_1} f'_{x_2} \\ f'_{x_1} f'_{x_2} & 1 + (f'_{x_2})^2 \end{bmatrix} = 1 + (f'_{x_1})^2 + (f'_{x_2})^2. \quad (15)$$

Assim a área de uma superfície (dimensão 2) é dada por

$$\text{área } \mathcal{S} = \iint_D \sqrt{1 + (f'_{x_1})^2 + (f'_{x_2})^2} dx_1 dx_2, \quad (16)$$

uma fórmula bem conhecida.

Vejamos ainda outro exemplo. Na esfera S_r^2 com a métrica do espaço euclidiano ambiente, com as coordenadas cilíndricas $\phi(p) = (\theta, z)$, vem $\phi^{-1}(\theta, z) = (\sqrt{1 - z^2} \cos \theta, \sqrt{1 - z^2} \sin \theta, z)$. E logo

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial \theta} = (-\sqrt{1 - z^2} \sin \theta, \sqrt{1 - z^2} \cos \theta, 0), \\ \partial_2 &= \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial z} = \left(\frac{-z \cos \theta}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{-z \sin \theta}{\sqrt{1 - z^2}}, 1 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Contas auxiliares mostram facilmente $\langle \partial_1, \partial_1 \rangle = 1 - z^2$, $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle = 0$, $\langle \partial_2, \partial_2 \rangle = \frac{1}{1 - z^2}$, pelo que $\det G = 1$ — finalmente justificando o elemento de área (3).

2.2 Desenvolvimentos

Outra propriedade intrínseca, ie. invariante da escolha da carta, que resulta de se ter definido uma métrica sobre a superfície considerada é a chamada *curvatura de Gauss*, uma certa função escalar $k : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ que em cada ponto p nos diz quão distante estão as mais ínfimas vizinhanças de p de se parecerem com um dos três modelos:

$$k = \begin{cases} -1 & \text{para o ponto de sela} \\ 0 & \text{para o plano euclidiano} \\ 1 & \text{para a esfera } S^2. \end{cases} \quad (18)$$

Estamos certos que o leitor reconhecerá aqueles três tipos de curvatura em dimensão 2, nomeadamente consultando [12].

Esta função escalar k dependente da métrica, descoberta pelo matemático C. F. Gauss (1777-1855) e generalizada a dimensão n pelo igualmente genial B. Riemann (1826-1866), tem acrescida uma propriedade muito especial (também esta generalizável a qualquer dimensão onde entram as classes de Pontryagin).

Teorema 5 (Gauss-Bonnet). *Se \mathcal{S} é compacta e orientável, $\int_{\mathcal{S}} k = 2\pi\chi$.*

Ou seja, somada a curvatura sobre o espaço todo obtemos essencialmente a característica de Euler — regressamos a um invariante estritamente topológico! Surpresa, de uma matéria que parecia estar reservada cada vez mais e mais aos deuses da matemática.

2.3 Análise – Álgebra – Topologia

Conjugam-se em geometria diferencial vários campos da matemática. Tentaremos uma constatação deste facto ainda com o cálculo de volumes. Procurando lembrar o matemático português e nosso mestre Professor Armando Machado, introdutor no ensino português das ideias que se seguem (cf. [11]).

2.3.1 O teorema de Fubini em variedades

Suponhamos que nos são dadas variedades Riemannianas M e N , ie. variedades com métricas C^∞ . Suponhamos que é dada uma função $f : M \rightarrow N$ também C^∞ . Um teorema devido a A. Sard (de 1942) diz-nos que os pontos críticos⁶ de

⁶Aqueles $p \in M$ onde a característica de df_p é menor que n .

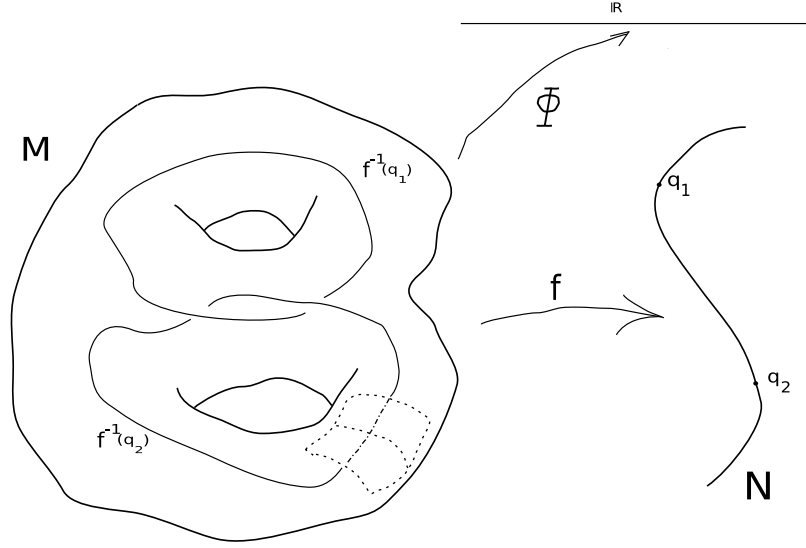


Figura 8: Se $\dim M = n$, $\dim N = n$ e $q \in N$ é valor regular, então $f^{-1}(q)$ é variedade suave de dimensão $m - n$.

f formam um conjunto de medida nula. Dito de outra forma, quase todos os valores que f toma são regulares.

Uma consequência mais avançada do teorema⁷ da função inversa mostrará que os subconjuntos

$$f^{-1}(q) = \{x \in M : f(x) = q\}, \quad q \in N \text{ valor regular}, \quad (19)$$

são subvariedades *mergulhadas*, isto é, comportam-se muito bem quando q é valor regular: existe uma carta especial (x_1, \dots, x_m) de M onde esses conjuntos serão dados por equações

$$x_{m-n+1} = 0, \dots, x_m = 0 \quad (20)$$

(cf. figura 8, a tracejado). Repare-se que $M = \cup_{y \in N} f^{-1}(y)$.

Assim, dada ainda mais uma função escalar $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ para dar razão a este esforço, temos uma nova função definida quase por todo o N :

$$q \in N \mapsto \int_{f^{-1}(q)} \Phi(x) \Omega_{f^{-1}(q)}(x), \quad (21)$$

⁷Se a função f tiver como derivada $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ um isomorfismo em p , então a função inversa f^{-1} existe numa vizinhança de p e é C^∞ .

ver (12). Em particular, se for $\Phi = 1$, temos o volume de cada $f^{-1}(q)$.

Suponhamos f sobrejectiva. Para cada $x \in M$ podemos definir o Jacobiano de f

$$(Jf)(x) = |\det \langle df_x(e_i), f_j \rangle| = \|df_x(e_1) \wedge \cdots \wedge df_x(e_n)\| \quad (22)$$

onde e_1, \dots, e_n é uma base ortonormada ($\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$) do subespaço ortogonal a $\ker df_x$ e f_1, \dots, f_n é uma base ortonormada de $T_{f(x)}N$. Prova-se facilmente que Jf não depende da escolha de tais bases.

Note-se que $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$ é sobrejectiva num valor regular $y = f(x)$. Por outro lado, se x é um ponto crítico, então $(Jf)(x) = 0$. O seguinte teorema remonta ao grande matemático H. Poincaré (1854-1912).

Teorema 6 (fórmula cinemática, cf. [10]). *Se Φ é mensurável à Borel e tal que $x \mapsto \Phi(x)Jf(x)$ é integrável em M , então a função (21) é integrável e*

$$\int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \Phi(x) \Omega_{f^{-1}(y)}(x) \right) \Omega_N(y) = \int_M \Phi(x) Jf(x) \Omega_M(x). \quad (23)$$

Este teorema exprime a forma mais geométrica do conhecido teorema de Fubini.

2.3.2 O grupo ortogonal

Consideremos $SO(n)$ o grupo das isometrias de \mathbb{R}^n de determinante 1: transformações lineares do espaço preservando a métrica euclidiana e a orientação. A sua composição, vindo de $\langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, é a das matrizes g tais que $g^t g = 1$ e $\det g = 1$. Temos de facto um grupo. Claro que da primeira equação resulta logo $\det g = \pm 1$ e nós escolhemos a parte que tem $\det 1$.

Mais, $SO(n)$ é variedade compacta (fácil) e conexa (difícil). Eis duas propriedades topológicas importantíssimas na compreensão da geometria do *grupo ortogonal*.

Seja M o espaço vectorial de todas as matrizes a de ordem n e seja N o subespaço daquelas que são simétricas. Seja $f : M \rightarrow N$ definida por $f(x) = x^t x$. Então $f^{-1}(1) = SO(n) \cup SO(n)^-$. Claro que $SO(n)^-$ se refere aos g tais que $g^t g = 1$ e $\det g = -1$.

As direcções em M tangentes a $f^{-1}(1)$ são aquelas sobre as quais f não varia, e reciprocamente pois 1 é valor regular. Com efeito, prova-se que $T_g(SO(n)) = \ker df_g$. Como pela regra de Leibniz

$$df_g(X) = X^t g + g^t X,$$

no ponto $g = 1$ vem $T_g(SO(n)) = \ker df_g = \{X \in M : X^t + X = 0\}$, ou seja todas as matrizes anti-simétricas. Agora torna-se muito fácil ver a dimensão de $SO(n)$: um vector tangente é uma matriz anti-simétrica, portanto descrita pelas entradas do triângulo acima da diagonal principal e excluindo esta por ser nula. Contando, temos a fórmula

$$\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (24)$$

Por exemplo, um ângulo dá-nos as rotações de \mathbb{R}^2 e três parâmetros as de \mathbb{R}^3 , mas são precisos seis para coordenar as rotações de \mathbb{R}^4 ...

2.3.3 A esfera como espaço de órbitas

Agora voltemos à superfície esférica de raio 1 de dimensão $n-1$, denotada por $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Fixemos uma direcção e_n qualquer perpendicular a um subespaço $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. O grupo ortogonal actua na esfera rodando-a sobre si mesma. $f : SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ actua como $g \mapsto g(e_n)$, uma função sobrejectiva, C^∞ e regular.

Quais são os g que fixam e_n ? São precisamente os que só rodam \mathbb{R}^{n-1} , donde a escrita do ‘espaço simétrico’

$$SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1} \quad (25)$$

como um espaço de órbitas $\{SO(n-1)g : g \in SO(n)\}$.

Com algum cuidado pode-se provar que $Jf(g) = 1$. Resulta então do teorema 6, chamemos-lhe de Fubini-Poincaré, lendo a fórmula (23), que

$$\text{vol } SO(n) = \text{vol } S^{n-1} \text{vol } SO(n-1) = \text{vol } S^{n-1} \text{vol } S^{n-2} \cdots \text{vol } S^1 \text{vol } S^0. \quad (26)$$

A última igualdade resulta claramente por indução. Como por outras vias se conhece o volume das esferas

$$\text{vol } S^{n-1} = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdots n-2} & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdots n-2} & \text{para } n \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (27)$$

eg. generalizando (16) ou consultando [6], vem

$$\text{vol } SO(n) = \begin{cases} \frac{2^{\frac{n(n+2)}{4}} \pi^{\frac{n^2}{4}}}{\prod_{i=0}^{(n-2)/2} (2i)!} & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{2^{\frac{(n+1)^2}{4}} \pi^{\frac{n^2-1}{4}}}{\prod_{i=0}^{(n-3)/2} (2i+1)!} & \text{para } n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (28)$$

Com este resultado da matemática do século XX terminamos esta breve exposição da geometria diferencial, lembrando que há muitos volumes ainda por calcular de variedades muito importantes e que de ideias novas para tal está o evoluir da Ciência dependente.

Referências

- [1] Arquimedes. Geometrical solutions derived from mechanics. Tradução de o “Método” para inglês da tradução de 1909 para alemão por J. L. Heiberg; disponível pelo Projecto Gutenberg.
- [2] Arquimedes. The quadrature of the parabola. <http://www.math.ubc.ca/~cass/archimedes/parabola.html>. Tradução de Th. L. Heath.
- [3] C. B. Boyer. *A History of Mathematics*. Wiley, 2nd edition, 1991. Revista por C. Merzbach.
- [4] S. E. Brodie. An ancient extra-geometric proof. <http://www.cut-the-knot.-org/pythagoras/Archimedes.shtml>.
- [5] D. McDuff e D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Mathematical Monographs. OUP, 1999.
- [6] Enciclopédias Wikipédia e Larousse.
- [7] Euclides. *Elementos*. <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html>.
- [8] I. Grattan-Guinness, editor. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Taylor and Francis Books Ltd, routledge reference edition, 1993.
- [9] Th. L. Heath. *The works of Archimedes*. Cambridge UP, 1897.
- [10] R. Howard. Classical integral geometry in riemannian homogeneous spaces. *Contemp. Math.*, 63:179–204, 1987.
- [11] A. Machado. *Geometria Diferencial - Uma Introdução Fundamental*. 1^a edição pela Editora Cosmos, 1991, 2^a edição pelo DMFCUL.
- [12] A. Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, London, 2001.